

Niveaux: SM PC SVT

Matière: Physique

PROF: Zakaryae Chriki

Résumé N:6

# Dipole RC

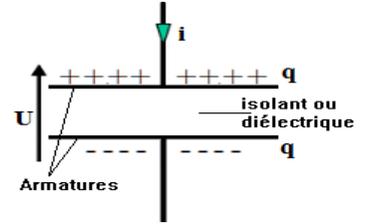


**Dipôle RC** : association série d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur de capacité C

## 1. Condensateur :

### Description.

Un condensateur est un dipôle constitué de deux armatures métalliques parallèles, placées à des potentiels différents et séparées par un isolant ou un diélectrique.



### Relation charge-tension.

La charge d'un condensateur, notée q, est liée à la tension U par la relation :

<b>q = C.U</b>	Avec :	C : capacité du condensateur (F)
		q : charge du condensateur (C)
		U : tension (V)

### Capacité d'un condensateur :

- Le coefficient de proportionnalité C est appelé capacité du condensateur.
- Son unité est le Farad (F)
- Autres unités du Farad

Millifarad 1mF=10 <sup>-3</sup> F
--------------------------------------

Microfarad 1µF=10 <sup>-6</sup> F
--------------------------------------

Nanofarad 1nF=10 <sup>-9</sup> F
-------------------------------------

Picofarad 1pF=10 <sup>-12</sup> F
--------------------------------------

### Expression de l'intensité.

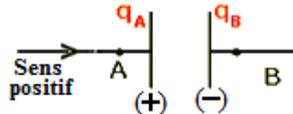
Par définition, l'intensité du courant traversant un condensateur est la variation de la charge q au cours du temps.

En adoptant la convention réceptrice pour ce dipôle, on obtient :

Courant continu
$I = \frac{Q}{\Delta t}$

Courant variable
$i = \frac{dq}{dt}$
avec $q=C.U_c$ d'où $i = C \cdot \frac{dU_c}{dt}$

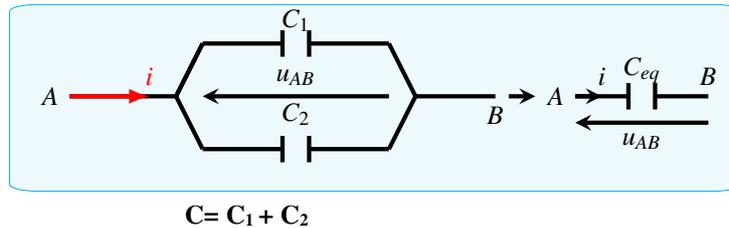
## 2. Sens conventionnel du courant :



Le sens positif (Conventionnel) du courant est toujours vers l'armature positive.

## 3. Association des condensateurs :

### Association en parallèle



La capacité équivalente C du condensateur équivalent de l'association en parallèle de deux condensateurs est égale à la somme de leurs capacités C<sub>1</sub> et C<sub>2</sub>.

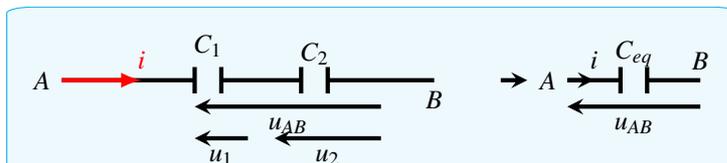
### NB :

La capacité équivalente C de plusieurs condensateurs de capacités C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub> ... C<sub>n</sub> montés en parallèle, de capacité est la somme des capacités de chaque condensateur :  $C = \sum C_i$

### Interet de l'association :

$C = C_1 + C_2$  : L'intérêt de l'association en parallèle des condensateurs est d'obtenir une capacité équivalente supérieure à la plus grande d'entre elles.  $C > C_1$  et  $C > C_2$

### Association en série :



La capacité équivalente C du condensateur équivalent de l'association en série de deux condensateurs de capacités C<sub>1</sub> et C<sub>2</sub> est telle que

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{et} \quad C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

**NB :**

La capacité équivalente C du condensateur équivalent de l'association en série des condensateurs de capacités C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, C<sub>3</sub> ... C<sub>n</sub>, montés en série, vérifie la relation :  $\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}$

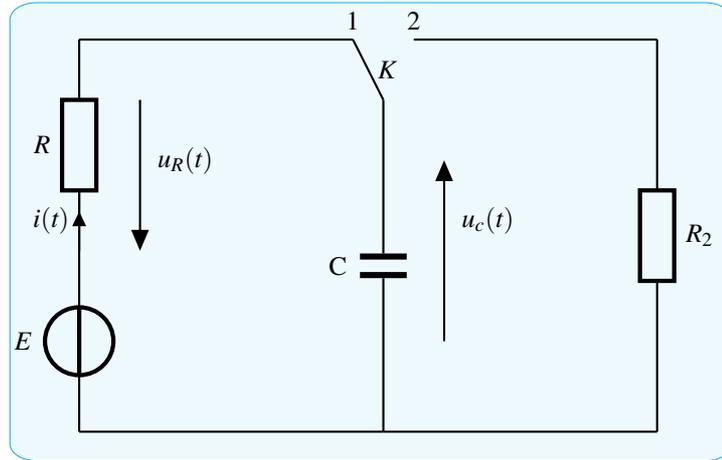
**Interet de l'association :**

$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$  : L'intérêt de l'association en parallèle des condensateurs est d'obtenir une capacité équivalente inférieure à la plus petite d'entre elles.  $C < C_1$  et  $C < C_2$

**4. Charge d'un condensateur :**

**Montage de la charge :**

Interrupteur K sur la position (1)



**Equation différentielle :**

En appliquant la loi d'additivité des tensions  $U_R + U_C = E$  et les transitions  $U_R = R \cdot i = R \cdot \frac{dq}{dt} = R \cdot C \cdot \frac{dU_C}{dt}$   
On aboutit à l'équation différentielle vérifiée par une variable donnée

**Variable la tension du condensateur Uc:**  $U_c + R \cdot C \cdot \frac{dU_c}{dt} = E$

**Variable la charge q:**  $\frac{q}{C} + R \cdot \frac{dq}{dt} = E$  Ou  $q + R \cdot C \cdot \frac{dq}{dt} = E \cdot C$

**Equation horaire :**

On considère Uc(t) comme variable et la solution de l'équation différentielle  $Uc(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + B$

- Pour déterminer les constantes **A, B et τ**, on remplace la solution et sa dérivée première dans l'équation différentielle

$$Uc(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + B \quad \text{et} \quad \frac{dUc(t)}{dt} = A \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$U_c + R \cdot C \cdot \frac{dU_c}{dt} = E : \text{équation différentielle vérifiée par } U_c$$

$$A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + B + R \cdot C \cdot \left(-\frac{A}{\tau}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = E \quad \text{et} \quad A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + B - R \cdot C \cdot A \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = E$$

$$\text{donc} \quad A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 - R \cdot C \cdot \frac{1}{\tau}\right) + B = E$$

Par Egalité de deux fonctions polynomiales, l'équation est exacte si : **B = E** et  $(1 - R \cdot C \cdot \frac{1}{\tau}) = 0$  d'où **τ = R.C**

- Déterminer la constante **A** par les conditions initiales :

à t=0 la tension Uc(0)=0, on remplace dans l'équation horaire et on obtient :  $Uc(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + B$

$$0 = A \cdot e^0 + B = A + B, \quad A + B = 0 \quad \text{et} \quad A = -B = -E$$

$$\text{Conclusion : } A = -E, \quad B = E \quad \text{et} \quad \tau = R \cdot C \quad \text{alors} \quad Uc(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + B = -E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + E = E \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

**NB :**

Souvent la solution est  $Uc(t) = A \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$  dont la dérivée première est  $\frac{dUc(t)}{dt} = A \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = A \cdot \left(\frac{1}{\tau}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$

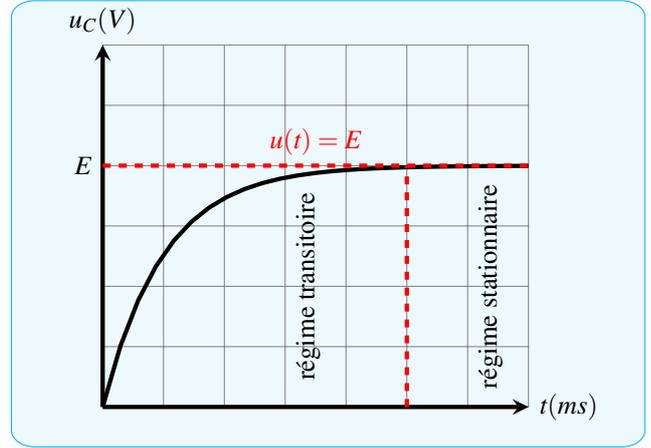
## La représentation de $u_C = f(t)$ :

Mathématiquement la courbe qui représente  $u_C = f(t)$  est la suivante tel que à  $t = 0$  on a  $u_C(0) = 0$  et quand  $t \rightarrow \infty$  on a  $u_C = E$ , pratiquement on considère  $t > 5\tau$  on a  $u_C(\infty) = E$

La courbe présente deux régime :

Un régime transitoire : la tension  $u_C(t)$  varie au cours du temps .

Un régime stationnaire ou régime permanent où  $u_C(t)$  reste constante et égale à  $E$



## Détermination de la constante du temps $\tau$ :

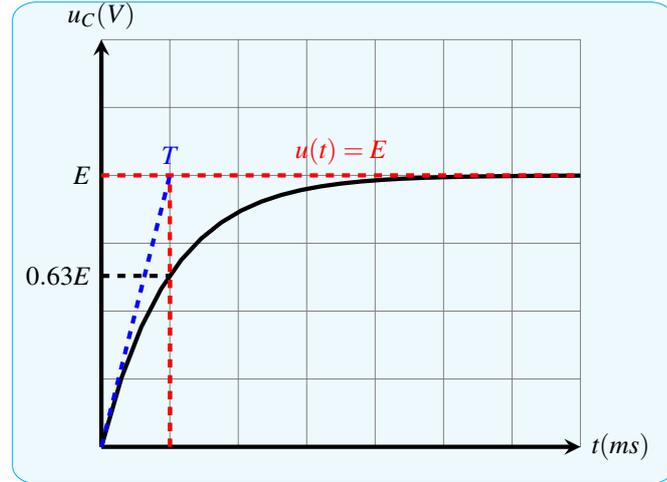
### Première méthode :

On utilise la solution de l'équation différentielle :

$$u_C(t = \tau) = E(1 - e^{-1}) = 0,63E$$

$\tau$  est l'abscisse qui correspond à l'ordonnée  $0,63E$

Deuxième méthode : utilisation de la tangente à la courbe à l'instant  $t=0$  .



### Unité de la constante du temps $\tau$ :

D'après l'équation des dimensions , on a  $[\tau] = [R].[C]$

$$\text{d'autre part } [R] = \frac{[U]}{[I]} \text{ et } [C] = \frac{[I]}{[U]}.[t] \text{ donc } [\tau] = [t]$$

La grandeur  $\tau$  a une dimension temporelle , son unité dans SI est le seconde (s) .

## Expression de l'intensité du courant de charge $i(t)$ :

On sait que l'intensité du courant de charge :  $i(t) = C \frac{du_C}{dt}$  tel que

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R_1 C} e^{-t/\tau}$$

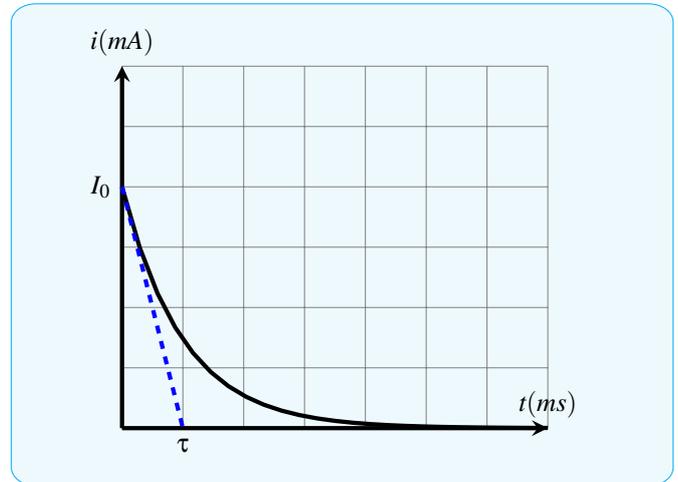
donc :

$$i(t) = \frac{CE}{R_1 C} \cdot e^{-t/\tau}$$

$$i(t) = \frac{E}{R_1} e^{-t/\tau}$$

tel que  $E/R_1$  représente l'intensité de courant à l'instant  $t = 0$  c'est à dire à  $t = 0$  on a  $u_C = 0$  donc  $E = R_1 \cdot J_0$  i.e  $J_0 = \frac{E}{R_1}$

$$i(t) = J_0 e^{-t/\tau}$$



## 5. Décharge d'un condensateur :

### Montage de la charge :

Interrupteur K sur la position (2)

### Equation différentielle :

En appliquant la loi d'additivité des tensions  $U_R + U_C = 0$  et les transitions

$$U_R = R \cdot i = R \cdot \frac{dq}{dt} = R \cdot C \cdot \frac{dU_C}{dt}$$

On aboutit à l'équation différentielle vérifiée par une variable donnée

Variable  $U_C$ :

$$U_C + R \cdot C \cdot \frac{dU_C}{dt} = 0$$

Variable  $q$ :

$$\frac{q}{C} + R \cdot \frac{dq}{dt} = 0 \quad \text{Ou} \quad q + R \cdot C \cdot \frac{dq}{dt} = 0$$

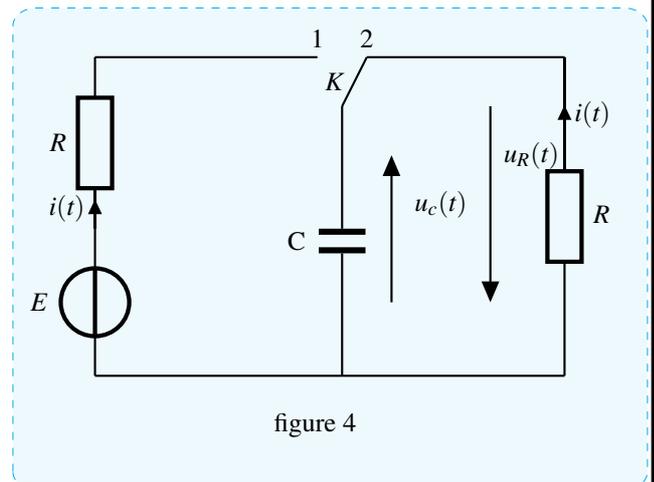


figure 4

### Equation horaire :

On considère  $U_c(t)$  comme variable et la solution de l'équation différentielle  $U_c(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + B$

- Pour déterminer les constantes **A, B et  $\tau$** , on remplace la solution et sa dérivée première dans l'équation différentielle

$$U_c(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + B \text{ et } \frac{dU_c(t)}{dt} = A \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad U_c + R \cdot C \cdot \frac{dU_c}{dt} = 0 : \text{équation différentielle vérifiée par } U_c$$

$$A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + B + R \cdot C \cdot \left(-\frac{A}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = 0 \quad \text{et} \quad A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + B - R \cdot C \cdot A \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \text{ donc } \mathbf{A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 - R \cdot C \cdot \frac{1}{\tau}\right) + B = 0}$$

Par Egalité de deux fonctions polynomiales, l'équation est exacte si :  **$B = 0$**  et  **$(1 - R \cdot C \cdot \frac{1}{\tau}) = 0$**  d'où  **$\tau = R \cdot C$**

- Déterminer la constante **A** par les conditions initiales :

à  $t=0$  la tension  $U_c(0) = E$ , on remplace dans l'équation horaire et on obtient :  **$U_c(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + B$**

$$E = A \cdot e^0 + B = A + B, E = A + B \text{ et } A = E \text{ vu que } B = 0$$

Conclusion :  $A=E$ ,  $B=0$  et  $\tau = R \cdot C$  alors  **$U_c(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + B = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + 0 = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$**

### La représentation de $u_C = f(t)$ :

Mathématiquement la courbe qui représente  $u_C = f(t)$  est la suivante tel que à  $t = 0$  on a  $u_C(0) = E$  et quand  $t \rightarrow \infty$  on a  $u_C = 0$ , pratiquement on considère  $t > 5\tau$  on a  $u_C(\infty) = 0$

### Dètermination de la constante du temps $\tau$ :

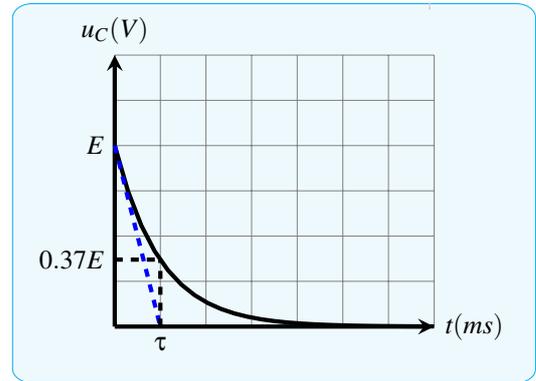
#### Première méthode :

On utilise la solution de l'équation  $u_C(V)$

différentielle :

$$u_C(t = \tau) = E e^{-1} = 0,37E$$

Deuxième méthode : utilisation de la tangente à la courbe à l'instant  $t=0$ . On a :



### Expression de l'intensité du courant de charge $i(t)$ :

$$\text{On a } u_C(t) = E e^{-t/\tau}$$

d'après la loi d'additivité des tensions :  $u_R = -u_C(t)$  i.e :  $u_R(t) = -E e^{-t/\tau}$  et puisque  $u_R = R i(t)$  c'est à dire  $i(t) = -\frac{E}{R} e^{-t/\tau}$

### 5. Energie électrique stockée dans un condensateur.

L'énergie électrique stockée par un condensateur est :

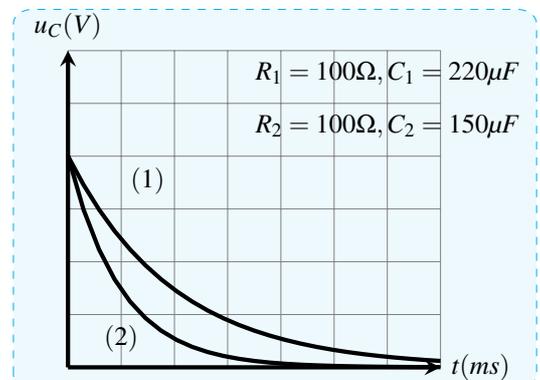
$$\mathcal{E}_e = \frac{1}{2} C \cdot u_C^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C}$$

$E_e$  s'exprime en joule (J) avec  $C$  en farad (F),  $u_C$  en volt (V) et  $q$  en coulomb (C).

### 6. L'influence de $\tau$ sur la durée de la décharge

#### f. l'influence de $\tau$ sur la durée de la décharge

On suppose que  $\tau_1 > \tau_2$ , on obtient la représentation graphique suivante : Quelle est l'influence de  $\tau$  sur la décharge du condensateur dans le dipôle RC



### NB :

- $\tau = R \cdot C$  : Constante de temps et est homogène à un temps
- Conditions initiales (à  $t=0$ ) :

$$\text{Charge d'un condensateur : } U_c(0) = 0, \quad q(0) = 0, \quad I(0) = I_0 = \frac{E}{R}$$

$$\text{Décharge d'un condensateur : } U_c(0) = E, \quad q(0) = C \cdot E, \quad I(0) = -I_0 = -\frac{E}{R}$$